باسمه‌تعالی

فصل ۴ آنالیز ابعادی و تشابه دینامیکی

منظور از آنالیز ابعادی: گروه‌بندی کمیت‌های مهم به صورت پارامترهای بدون بعد (بدون واحد اندازه‌گیری) است.

منظور از تشابه دینامیکی: تهیه مدلی هیدرولیکی در مقیاس کوچک از یک پدیده واقعی است.

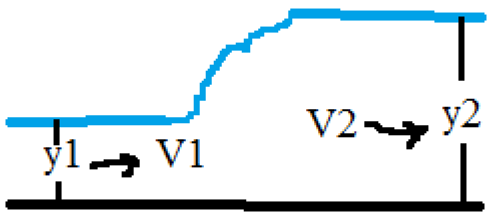
چند مثال از کاربرد اعداد بدون بعد: در بررسی اثرات لزجت درون لوله‌ها، عدد رینولدز اهمیت دارد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

برای جریان آب در کانال‌های باز، عدد فرود بیشترین اهمیت را دارد. عدد فرود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D = \frac{A}{T} \quad Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}}$$

بررسی پرش هیدرولیکی



اگر شکل مقابل جریان آب در یک کانال باز را نشان دهد، با فرض عرض کانال برابر یک متر، داریم:

$$A_1 = y_1 \text{ و } A_2 = y_2$$

و از پیوستگی داریم: $V_1 y_1 = V_2 y_2$ بنابراین: $V_1 = V_2 \frac{y_2}{y_1}$, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{y_2}{y_1}$ (رابطه ۱)

از رابطه اندازه حرکت داریم: $\frac{1}{2}\gamma y_1^2 - \frac{1}{2}\gamma y_2^2 = \rho V_2 (V_2 y_2) + \rho V_1 (-V_1 y_1)$ (رابطه ۲)

و از رابطه انرژی داریم: $\frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{V_2^2}{2g} + y_2 + h_j$ (رابطه ۳)

از رابطه (۲) داریم:

$$\frac{1}{2}\gamma y_1^2 - \frac{1}{2}\gamma y_2^2 = \frac{\gamma V_1 y_1}{g}(V_2 - V_1)$$

$$=> \frac{1}{2}\gamma y_1^2 \left[1 - \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2\right] = V_1^2 \frac{\gamma}{g} y_1 \left[\frac{V_2}{V_1} - 1\right] = V_1^2 \frac{\gamma}{g} y_1 \left[\frac{y_1}{y_2} - 1\right] = V_1^2 \frac{\gamma}{g} y_1 \left[1 - \frac{y_2}{y_1}\right]\frac{y_1}{y_2}$$

سمت راست معادله فوق نیروهای اینرسی و سمت چپ آن نیروهای فشاری ناشی از جاذبه ثقل است. [illegible] جمله $\frac{y_1^2}{2}\gamma$ نیرو بر واحد عرض است و جمله $\left(1 - \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2\right)$ عددی بی بعد است که مقدار آن به شکل هندسی پرش هیدرولیکی بستگی دارد. با تقسیم طرفین بر $\left(1 - \frac{y_2}{y_1}\right)$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}\gamma y_1^2 \left[1 + \frac{y_2}{y_1}\right] = V_1^2 \frac{\gamma}{g} y_1 \frac{y_1}{y_2} \quad \text{،} \quad \text{طرفین} \times \frac{y_2}{\gamma y_1^3} => \frac{1}{2}\frac{y_2}{y_1}\left[1 + \frac{y_2}{y_1}\right] = \frac{V_1^2}{g y_1}$$

سمت راست عدد بی‌بعد فرود به توان دو را نشان می‌دهد که صورت و مخرج آن به ترتیب نشان‌دهنده نیروی اینرسی و نیروی وزن هستند.

سؤال: آیا می‌توان بدون نوشتن روابط انرژی، پیوستگی و اندازه حرکت تعیین کرد در هر مسأله چه تعداد متغیر بدون بعد داریم؟

قضیه π به این پرسش پاسخ می‌دهد.

قضیه باکینگهام (قضیه π)

صورت قضیه: در یک مسأله فیزیکی شامل n کمیت که دارای m بعد اصلی هستند، کمیات را می‌توان به صورت $n-m$ پارامتر بی بعد مستقل مرتب کرد.

جدول معرفی کمیت‌های فیزیکی معروف و نماد و ابعاد آنها:

کمیت	نماد	بعد	کمیت	نماد	بعد	کمیت	نماد	بعد
طول	l	L	مساحت	A	L^2	لزجت دینامیک	μ	$ML^{-1}T^{-1}$
زمان	t	T	دبی	Q	L^3T^{-1}	لزجت سینماتیک	ν	L^2T^{-1}
جرم	m	M	فشار	Δp	$ML^{-1}T^{-2}$	کشش سطحی	σ	MT^{-2}
نیرو	F	MLT^{-2}	شتاب جاذبه	g	LT^{-2}	مدول الاستیسیته حجمی	K	$ML^{-1}T^{-2}$
سرعت	V	LT^{-1}	چگالی	ρ	ML^{-3}			
شتاب	a	LT^{-2}	وزن مخصوص	γ	$ML^{-2}T^{-2}$			

برای نمونه در مثال اخیر (پرش هیدرولیکی) به کمک قضیه π تعیین کنید تعداد پارامترهای بدون بعد چند تا است؟

نام کمیت	y_1	y_2	V_1	V_1
واحد هر کمیت	m	m	m/s	m/s
بعد هر کمیت	L	L	L/T	L/T
خلاصه:	تعداد کمیت‌ها: $n=4$		تعداد ابعاد اصلی مستقل: $m=2$	

بنابراین: تعداد پارامترهای بدون بعد در این مسأله: $n-m=4-2=2$

فرض کنیم A_1، A_2، ... و A_n کمیات مطرح در مسأله (مثلاً فشار، لزجت، سرعت و ...) باشند. تمام این کمیات در جواب مسأله مؤثر شناخته شده‌اند و بنابراین باید رابطه‌ای بین آنها وجود داشته باشد؛ یعنی:

$$F(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0$$

حال اگر پارامترهای بدون بعد را با π_1، π_2 و ... π_{n-m} نشان دهیم، طبق قضیه π رابطه بالا به شکل زیر قابل بیان است:

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m}) = 0$$

گام‌های روش اول برای تعیین پارامترهای بی‌بعد در یک مسأله:

گام اول: کمیت‌های اصلی بکاررفته در مسأله و ابعاد آنها را می‌نویسیم. بنابراین n و m بدست می‌آید.

گام دوم: تعیین تعداد پارامترهای بدون بعد مسأله، $n-m$

گام سوم: از بین تعداد n کمیت بکاررفته در مسأله، m عدد از آنها را به عنوان متغیرهای تکراری انتخاب می‌کنیم بطوریکه ابعاد آنها متفاوت باشد؛ شامل m بعد اصلی بکاررفته در مسأله باشند و هیچ‌کدام از متغیرهای تکراری انتخاب‌شده را نتوان بر حسب بقیه نوشت. برای نمونه، فرض کنیم کمیت‌های A_1 تا A_n در یک مسأله مؤثر باشند؛ کمیت‌های اصلی بکاررفته در آنها M، L و T باشد $(m=3)$

در اینجا سه متغیر تکراری را طوری انتخاب می‌کنیم که در مجموع شامل M، L و T باشند (لازم نیست در هر یک از آنها M، L و T با هم وجود داشته باشد)

گام چهارم: π_1 تا π_{n-m} را تشکیل می‌دهیم، بطوریکه هر یک از π_1 تا π_{n-m} به صورت حاصلضرب m عدد متغیر تکراری در یکی دیگر از کمیت‌ها نوشته شود. برای نمونه با فرض $m = 3$ ، π_iها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\pi_1 = A_1^{x_1}.A_2^{y_1}.A_3^{z_1}.A_4 \quad , \qquad \pi_2 = A_1^{x_2}.A_2^{y_2}.A_3^{z_2}.A_5 \quad , \ldots , \quad \pi_{n-m} = A_1^{x_{n-m}}.A_2^{y_{n-m}}.A_3^{z_{n-m}}.A_n$$

گام پنجم: با توجه به اینکه هر یک از π_iهای نوشته شده بدون بعد هستند پس لازم است داشته باشیم: $[\pi_i] = M^0L^0T^0 = 1$

بدین ترتیب، برای هر π_i یک دستگاه m معادله و m مجهول می‌نویسیم تا مجهولات x_i، y_i، z_i و ... بدست آید.

مثال: برای دبی عبوری از یک لوله مویین افقی، دبی عبوری Q به افت فشار در واحد طول لوله $\frac{\Delta p}{L}$، قطر لوله D و لزجت سیال μ بستگی دارد. شکل معادله دبی را تعیین نمایید.

نام کمیت	Q	$\frac{\Delta p}{L}$	D	μ
واحد هر کمیت	m^3/s	pa/m	m	pa. s
بعد هر کمیت	L^3/T	$ML^{-2}T^{-2}$	L	$ML^{-1}T^{-1}$
خلاصه:	تعداد کمیت‌ها: $n = 4$		تعداد ابعاد اصلی مستقل: $m = 3$	

بنابراین: تعداد پارامترهای بدون بعد در این مسأله: $n - m = 4 - 3 = 1$

گام ۳: تعیین متغیرهای تکراری این مسأله: Q ، $\frac{\Delta p}{L}$ و D

گام ۴:

$$\pi = Q^{x_1}\left(\frac{\Delta p}{L}\right)^{y_1} D^{z_1}\,\mu$$

$$\pi = (L^3T^{-1})^{x_1}(ML^{-2}T^{-2})^{y_1}L^{z_1}(ML^{-1}T^{-1}) = M^0L^0T^0$$

$$M^{y_1+1} = M^0 \quad , \quad L^{3x_1-2y_1+z_1-1} = L^0 \quad , \quad T^{-x_1-2y_1-1} = T^0$$

$$\begin{cases} y_1 + 1 = 0 \\ -x_1 - 2y_1 - 1 = 0 \\ 3x_1 - 2y_1 + z_1 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} y_1 = -1 & \\ -x_1 - 2(-1) - 1 = 0 & x_1 = 2 - 1 = 1 \\ 3(1) - 2(-1) + z_1 - 1 = 0 & z_1 = -3 - 2 + 1 = -4 \end{array}$$

$$=> \pi = Q^1\left(\frac{\Delta p}{L}\right)^{-1}D^{-4}\mu = \frac{Q.\mu}{\left(\frac{\Delta p}{L}\right).D^4} = c => Q = c\,\frac{\Delta p}{L}\frac{D^4}{\mu}$$

$$f(x) = 0: ax + b = 0\,; f\left(\frac{Q.\mu}{\left(\frac{\Delta p}{L}\right).D^4}\right) = 0\,, a\left(\frac{Q.\mu}{\left(\frac{\Delta p}{L}\right).D^4}\right) + b = 0, \frac{Q.\mu}{\left(\frac{\Delta p}{L}\right).D^4} = -\frac{b}{a} = c$$

مقدار c با آنالیز ابعادی مشخص نمی‌شود بلکه از سایر روش‌ها (مثل انجام آزمایش) بدست می‌آید.

گام‌های روش دوم (روش هانساکر –وایتمایر که اغلب سریع‌تر به جواب می‌رسد) برای تعیین پارامترهای بی‌بعد در یک مسأله؛ سه گام اول این روش مشابه روش اول هستند:

گام اول: کمیت‌های اصلی بکاررفته در مسأله و ابعاد آنها را می‌نویسیم. بنابراین n و m بدست می‌آید.

گام دوم: تعیین تعداد پارامترهای بدون بعد مسأله، $n-m$

گام سوم: از بین تعداد n کمیت بکاررفته در مسأله، m عدد از آنها را به عنوان متغیرهای تکراری انتخاب می‌کنیم بطوریکه ابعاد آنها متفاوت باشد؛ شامل m بعد اصلی بکاررفته در مسأله باشند و هیچ‌کدام از متغیرهای تکراری انتخاب‌شده را نتوان بر حسب بقیه نوشت. برای نمونه، فرض کنیم کمیت‌های A_1 تا A_n در یک مسأله مؤثر باشند؛ کمیت‌های اصلی بکاررفته در آنها M، L و T باشد ($m=3$) در اینجا سه متغیر تکراری را طوری انتخاب می‌کنیم که در مجموع شامل M، L و T باشند (لازم نیست در هر یک از آنها M، L و T با هم وجود داشته باشد)

گام چهارم: ابعاد اصلی (برای مثال M، L و T) را بر حسب متغیرهای تکراری می‌نویسیم.

گام پنجم: سایر متغیرها (به غیر از متغیرهای تکراری) را بر حسب متغیرهای تکراری می‌نویسیم و سپس π_i ها را تشکیل می‌دهیم.

مثال برای جریان آشفته در یک لوله افقی، افت فشار واحد طول لوله ($\frac{\Delta p}{L}$) به سرعت جریان (V)، قطر لوله (D)، ضریب لزجت (μ) و چگالی (ρ) بستگی دارد. یعنی $F\left(\frac{\Delta p}{L}, V, D, \mu, \rho\right)=0$ به کمک آنالیز ابعادی (روش دوم) شکل کلی معادله را بدست آورید.

نام کمیت	$\frac{\Delta p}{L}$	V	D	μ	ρ
واحد در SI	pa/m	m/s	m	pa. s	kg/m^3
بعد هر کمیت	$ML^{-2}T^{-2}$	LT^{-1}	L	$ML^{-1}T^{-1}$	ML^{-3}
خلاصه:	تعداد کمیت‌ها: $n=5$ ، تعداد ابعاد اصلی مستقل: $m=3$				

بنابراین: تعداد پارامترهای بدون بعد در این مسأله: $n-m=5-3=2$

گام ۳: انتخاب متغیرهای تکراری: V, D, ρ

گام ۴:

$$D = L \Rightarrow L = D$$
$$V = \frac{L}{T} \Rightarrow T = \frac{L}{V} = \frac{D}{V} = DV^{-1} \Rightarrow T = DV^{-1}$$
$$\rho = ML^{-3} \Rightarrow M = \rho L^3 = \rho D^3 \Rightarrow M = \rho D^3$$

گام ۵:

$$\frac{\Delta p}{L} = ML^{-2}T^{-2} = (\rho D^3)\, D^{-2}\, (DV^{-1})^{-2} \Rightarrow \frac{\Delta p}{L} = \rho V^2 D^{-1}$$
$$\mu = ML^{-1}T^{-1} = (\rho D^3)\, D^{-1}\, (DV^{-1})^{-1} \Rightarrow \mu = \rho V D$$

$$\pi_1 = \frac{\frac{\rho V^2}{D}}{\frac{\Delta p}{L}} \quad , \qquad \pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu} \quad \Rightarrow F\left(\frac{\rho V^2/D}{\Delta p/L}, \frac{\rho V D}{\mu}\right) = 0 \text{ یا } \frac{\Delta p}{L} = f_1\left(\frac{\rho V^2}{D}, \frac{\rho V D}{\mu}\right)$$

مثال: جریانی به پارامترهای زیر بستگی دارد: سرعت جریان (V)، چگالی (ρ)، طول‌های l_1, l_2, l افت فشار (Δp)، شتاب جاذبه (g) لزجت (μ)، کشش سطحی (σ) و مدول الاستیسیته حجمی (K) مطلوب است تعیین پارامترهای بی‌بعد مسأله به روش دوم.

متغیرهای تکراری: ρ، V و l

نام کمیت	V	ρ	l_1, l_2, l	Δp	g	μ	σ	K
واحد در SI	m/s	kg/m^3	m	Pa	m/s^2	pa.s	N/m	Pa
بعد هر کمیت	LT^{-1}	ML^{-3}	L	$ML^{-1}T^{-2}$	LT^{-2}	$ML^{-1}T^{-1}$	MT^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$
خلاصه:	تعداد کمیت‌ها: $n = 10$ ، تعداد ابعاد اصلی مستقل: $m = 3$							

بنابراین: تعداد پارامترهای بدون بعد در این مسأله: $n - m = 10 - 3 = 7$

گام ۳: متغیرهای تکراری: ρ، V و l

گام ۴:

$$l = L$$
$$v = LT^{-1} \Rightarrow T = l v^{-1}$$
$$\rho = ML^{-3} \Rightarrow M = \rho l^3$$

گام ۵:

$$\Delta p = \rho l^3 l^{-1} (l v^{-1})^{-2} = \rho l^0 v^2 \Rightarrow \pi_1 = \frac{\rho v^2}{\Delta p}$$

$$g = LT^{-2} = l (l v^{-1})^{-2} = l^{-1} v^2 \Rightarrow \pi_2 = \frac{v^2}{g l}$$

$$\mu = ML^{-1}T^{-1} = \rho l^3 l^{-1} (l v^{-1})^{-1} = \rho l v \qquad \pi_3 = \frac{\rho l v}{\mu}$$

$$\sigma = MT^{-2} = \rho l^3 (l v^{-1})^{-2} = \rho l v^2 \Rightarrow \pi_4 = \frac{\rho l v^2}{\sigma}$$

$$K = ML^{-1}T^{-2} = \rho l^3 l^{-1} (l v^{-1})^{-2} = \rho v^2 \Rightarrow \pi_5 = \frac{\rho v^2}{K}$$

$$\pi_6 = \frac{l}{l_1} \qquad \pi_7 = \frac{l}{l_2}$$

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7) = 0$$

$$f\left(\frac{\rho v^2}{\Delta p}, \frac{v^2}{g l}, \frac{\rho v l}{\mu}, \frac{\rho v^2 l}{\sigma}, \frac{\rho v^2}{K}, \frac{l}{l_1}, \frac{l}{l_2}\right) = 0$$

$$f_1\left(\frac{\Delta p}{\rho v^2}, F, R, W, M, \frac{l}{l_1}, \frac{l}{l_2}\right) = 0$$

وبر ماخ

یا

$$\Delta p = \rho v^2 f_2\left(F, R, W, M, \frac{l}{l_1}, \frac{l}{l_2}\right)$$

تشابه دینامیکی

اگر بخواهیم اطلاعات دقیقی از مطالعه مدل بدست آوریم، لازم است بین مدل و نمونه واقعی تشابه دینامیکی برقرار باشد. تشابه دینامیکی دو شرط دارد:

الف) بین مدل و نمونه تشابه هندسی کامل وجود داشته باشد. به عبارت دیگر تمام اجزای نمونه واقعی با نسبت یکسانی کوچک شده باشند. تشابه هندسی شامل زبری سطوح هم می‌شود؛ برای نمونه اگر مقیاس (یعنی نسبت ابعاد مدل به نمونه واقعی) ۱ به ۱۰ باشد، باید ارتفاع برآمدگی‌های زبری سطح مدل هم یک‌دهم ارتفاع برآمدگی‌های زبری سطح نمونه اصلی باشد.

ب) نسبت نیروهای فشاری در نقاط متناظر مدل و نمونه واقعی یکسان باشد. برای تحقق کامل این شرط، لازم است نسبت سایر نیروها هم در نقاط متناظر یکسان باشد. به عبارت دیگر، برای برقراری تشابه دینامیکی باید عدد رینولدز، عدد فرود، عدد ماخ و عدد وبر در مدل و نمونه واقعی یکسان باشند. تحقق کامل این شرایط در عمل نیازمند این است که نسبت هندسی مدل به نمونه اصلی $\frac{1}{1}$ باشد که غیر ممکن است. پس راه حل چیست؟

در بسیاری از مسائل تنها دو نیروی مهم وجود دارد و با درنظر گرفتن آن دو نیرو می‌توان مهم‌ترین عدد بی‌بعد را در آن مسأله شناخت و در نتیجه آن عدد بی‌بعد را برای مدل و نمونه واقعی برابر قرار داد. در ادامه، اشاره‌ای به مفهوم چند تا از پارامترهای بی‌بعد می‌شود:

عدد رینولدز (Re)، برای تشخیص جریان آرام و آشفته بکار می‌رود:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V l}{\mu} \times \frac{Vl}{Vl} = \frac{\rho V^2 (l^2)}{\mu \frac{V}{l} (l^2)} \propto \frac{\rho V^2 A}{\tau A} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی لزجت}}$$

عدد فرود (Fr)، برای تشخیص میزان بحرانی بودن جریان در کانال‌های روباز، پرش هیدرولیکی، طراحی کشتی و سازه‌های هیدرولیکی کاربرد دارد:

$$\mathrm{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gl}} \Rightarrow \mathrm{Fr}^2 = \frac{V^2}{gl} \times \frac{\rho A}{\rho A} = \frac{\rho V^2 A}{\rho g A l} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی وزن}}$$

عدد وبر (W)، در فصل مشترک گاز با مایع یا دو مایع مختلف کاربرد دارد.

$$W = \frac{\rho V^2 l}{\sigma} \times \frac{l}{l} = \frac{\rho V^2 l^2}{\sigma l} \propto \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی کشش سطحی}}$$

عدد ماخ (M)، وقتی دارای اهمیت است که سرعت در یک مسأله، به سرعت صوت محلی نزدیک باشد؛ سرعت صوت در مایعات با رابطه $C = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ بیان می‌شود که در آن K مدول الاستیسیته حجمی مایع مورد نظر است. سرعت صوت در گاز کامل با رابطه $C = \sqrt{kRT}$ بیان می‌شود که در آن k نسبت گرمای ویژه، R ثابت گازها و T دمای مطلق (بر حسب کلوین) است. برای نمونه برای مایعات داریم:

$$M = \frac{V}{C} = \frac{V}{\sqrt{\frac{K}{\rho}}} \Rightarrow M^2 = \frac{V^2}{\frac{K}{\rho}} \times \frac{\frac{1}{2}\rho A}{\frac{1}{2}\rho A} = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 A}{\frac{1}{2} K A} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی الاستیک}}$$

در مسأله‌هایی که دارای سطح آزاد مشخص مایع هستند، همانند سرریزها، حوضچه‌های آرامش و تبدیل کانال‌های روباز دو نیروی مهم وجود دارد: ۱- نیروی جاذبه (وزن سیال) ناشی از تغییر ارتفاع سطح مایع و ۲- نیروی اینرسی.

پرسش: در چنین مسأله‌هایی کدام عدد بی‌بعد دارای اهمیت است؟

پاسخ: عدد فرود، بنابراین برای برقراری تشابه دینامیکی در چنین مسائلی کافی است عدد فرود را برای مدل و نمونه اصلی مساوی قرار دهیم. اگر از حرف ($m = model$) برای مدل و حرف ($p = prototype$) برای نمونه اصلی استفاده کنیم، داریم:

$$\frac{V_m^2}{g_m l_m} = \frac{V_p^2}{g_p l_p} => V_p^2 = \frac{l_p}{l_m} V_m^2 => V_p = \sqrt{\frac{l_p}{l_m}} V_m = \sqrt{\lambda} V_m => \frac{V_p}{V_m} = \sqrt{\lambda}$$

که در آن، $\lambda = \frac{1}{L_r} = \frac{l_p}{l_m}$ نسبت مقیاس نامیده می‌شود و عددی بزرگتر از یک است. برای چنین مسائلی، مدت زمان وقوع اتفاقات در مدل و نمونه به صورت زیر به هم مربوط می‌شود:

$$t_m = \frac{l_m}{V_m} \quad , \qquad t_p = \frac{l_p}{V_p} => \frac{t_p}{t_m} = \frac{\frac{l_p}{V_p}}{\frac{l_m}{V_m}} = \frac{l_p V_m}{l_m V_p} = \lambda \frac{V_m}{V_p} = \lambda \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda}$$

هم‌چنین، برای چنین مسائلی، نسبت دبی در مدل و واقعیت به صورت زیر به هم ربط داده می‌شود

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{\frac{l_p^3}{t_p}}{\frac{l_m^3}{t_m}} = \frac{l_p^3 t_m}{l_m^3 t_p} = \lambda^3 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \lambda^{2.5}$$

و نسبت نیروهای وارد بر دریچه برای چنین مسائلی به صورت زیر به هم مربوط می‌شود:

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{\gamma h_p l_p^2}{\gamma h_m l_m^2} = \lambda^3$$

در مسأله‌هایی که نیروهای اینرسی ولزجت مهم باشد، تشابه رینولدز کاربرد دارد. مثال‌هایی از این نوع مسائل: جریان تحت فشار در لوله‌ها، حرکت زیردریایی، آزمایش تونل آب، آزمایش تونل هوا (به شرطی که بتوان با ثابت نگهداشتن فشار و دما هوا را تراکم‌ناپذیر فرض کرد)، حرکت پرتابه با سرعت پایین در هوا. برای تشابه عدد رینولدز داریم:

$$Re_m = Re_p => \frac{V_m l_m}{\nu_m} = \frac{V_p l_p}{\nu_p} => \frac{V_m}{V_p} = \frac{l_p}{l_m} \frac{\nu_m}{\nu_p} = \lambda \frac{\nu_m}{\nu_p}$$

مثال ۱: در مدلی از یک سرریز با مقیاس ۱ به ۲۵ ، این پارامترها برای مدل اندازه‌گیری شده است:

$V_m = 0.6 \frac{m}{s}$, $Q_m = 0.08 \frac{m^3}{s}$ مطلوب است محاسبه سرعت و دبی در نقطه متناظر از سرریز اصلی.

تشابه فرود : $Fr_m = Fr_p \qquad \frac{V_m}{V_p} = \sqrt{L_r} \Rightarrow V_p = \frac{V_m}{\sqrt{L_r}} = \frac{0.6}{\sqrt{\frac{1}{25}}} = 3 \frac{m}{s}$

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \left(\frac{1}{L_r}\right)^{\frac{5}{2}} \Rightarrow Q_p = Q_m \left(\frac{1}{L_r}\right)^{2.5} = 0.08 \, [25]^{2.5} = 250 \frac{m^3}{s}$$

مثال ۲: مدلی از هواپیما با مقیاس ۱ به ۲۰ در تونل باد آزمایش می‌شود؛ اگر سرعت هواپیمای اصلی در فضا $640\,\frac{km}{hr}$ باشد، با فرض ثابت بودن دما و فشار در مدل و واقعیت، سرعت باد در تونل باد چقدر باید باشد؟

تشابه رینولدز

$$\frac{V_m}{V_p} = \left(\frac{1}{L_r}\right)\frac{\nu_m}{\nu_p} \Rightarrow \frac{V_m}{640} = \frac{1}{\frac{1}{20}}\left(\frac{1}{1}\right) \Rightarrow V_m = 12800\,\frac{km}{hr}$$

مثال ۳: مدلی با مقیاس ۱ به ۱۰۰ از یک سد بتنی ساخته شده است؛ زمان تخلیه آب در واقعیت ۱۵ روز است؛ مطلوب است محاسبه زمان تخلیه آب در مدل ساخته شده.

$$t_m = t_p\sqrt{L_r} = 15\sqrt{\frac{1}{100}} = 1.5 \text{ روز}$$